

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Füüsika instituut

Yelyzaveta Tokareva

**ÜLDRELATIIVSUSTEOORIA LÄHEDASED
KOSMOLOOGILISED MUDELID
BISKALAAR-TENSORGRAVITATSIOONITEOORIADES**

Bakalaureusetöö (12 EAP)

Juhendajad:
Piret Kuusk, DSc
Simon Vigonski, MSc

Tartu 2017

Üldrelatiivsusteooria lähedased kosmoloogilised mudelid

biskalaar-tensorgravitatsiooniteooriates

Antud töös uurime kosmoloogilisi mudeleid, kus gravitatsiooni kirjeldatakse aegruumi meetrika ja kahe täiendava skalaarväljaga. Skalaarväljade ruumis on leitud punkt, kus antud teooria mudel oleks vastavuses üldrelatiivsusteooriaga. Selle punkti ümber tehakse Taylori arendus, milles lisatakse häiritused skalaarväljade algväärtustele nimetatud punktis. Selles bakalaureusetöös me töötasime välja meetodi häiritusvõrrandite numbriliste lahendite leidmiseks Pythoni abil selleks, et uurida häirituste käitumist üldises mõjufunktsionaalis esinevate erinevate funktsioonide korral, mida iseloomustavad funktsioonide erinevad väärtused Taylori arenduse alguspunktis. Integreerisime võrrandid numbriliselt ja joonistasime graafikuid lahenditest, et visualiseerida nende käitumist.

Märksõnad: kosmoloogiline mudel, skalaar-tensorteooria, numbriline lahend.

CERCS: P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Cosmological models close to the general relativity limit in

biscalar-tensor gravities

In this paper we study cosmological models where gravitation is described by a spacetime metric with two additional scalar fields. A point in scalar field space is chosen so the models would be in agreement with general relativity limits. Additional perturbances are added to initial field values. Later Taylor series is used to expand perturbances around the chosen point. In this bachelore thesis we developed a method for solving the equations numerically using Python to study the behaviour of perturbances dependent on the values of functions of scalar fields. Finally, we plot solutions on the graphs to visualize their behaviour.

Keywords: cosmology, scalar-tensor theory , numerical solution, general relativity.

CERCS: P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Sisukord

Sissejuhatus	5
1 Teoreetiline ülevaade	6
1.1 Newtoni gravitatsiooniseadus	6
1.2 Üldrelatiivsusteooria	6
1.3 Kosmoloogiline konstant	7
1.4 Robertsoni-Walkeri meetrika	7
1.5 Friedmanni võrrandid	8
1.6 Biskalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria	9
2 Üldrelatiivsusteooriast vähe erinevate biskalaar-tensorteooriate kosmoloogilised võrrandid	11
3 Metodoloogia	13
4 Meetodi valideerimine	16
5 Nubriliste meetodite rakendus	19
5.1 Sümmeetrilised graafikud	19
5.2 Varieerime A ja \mathcal{A}	22
5.3 Varieerime B ja \mathcal{B}	24
5.4 Varieerime C	25
5.5 Varieerime W ja \mathcal{W}	26
5.6 Varieerime Ψ	28
Kokkuvõte	30
Tänuavaldused	31
Kirjandus	32

Sissejuhatus

Universumi ehitust kirjeldava kosmoloogia aluseks on gravitatsiooniteooria. Pika aja jooksul toetus enamik kosmoloogilisi teooriaid Einsteini üldrelatiivsusteooria võrranditele. Kuid viimastel aastakümnetel kasvas huvi alternatiivsete teooriate vastu. Üks kaasaegse füüsika lahendamata probleemidest on universumi kiirenev paisumine. Juba alates 1920ndatest aastatest oli teada, et meie universum paisub. Kuid alles 1990ndatel näitasid vaatlused, et universum paisub kiirenevalt; selle uurimuse autoritele anti Nobeli preemia aastal 2011. Kiireneva paisumise seletamiseks postuleeriti tumeenergia ja tumeaine olemasolu, kuid nende loomus on siiani teadmata. Võimalus tumeenergia seletamiseks on muuta Einsteini teooriat.

Üks esimestest katsetest täiendada üldrelatiivsusteooriat oli oletada, et gravitatsiooniline vastastikmõju on kirjeldatud mitte ainult aegruumi meetrikaga nagu üldrelatiivsusteoorias, vaid lisaks veel ka täiendava skalaarväljaga. Vastavaid kosmoloogilisi mudeleid on palju uuritud.

Antud töös on uurimise alla võetud keerulisem üldistatud gravitatsiooniteooria, kus gravitatsiooni kirjeldatakse aegruumi meetrika ja kahe täiendava skalaarväljaga. Meie huvi keskmes on homogeensed ja isotroopsed kosmoloogilised mudelid ja eriti just mudelite see osa, kus teooria erineb üldrelatiivsusteooriast vähe. Sellist valikut põhjendab asjaolu, et üldrelatiivsusteooria on Päikesesüsteemi ulatuses väga hästi kooskõlas vaatlustega ja seega ei saa täiendatud teooria väga palju erineda üldrelatiivsusteooriast.

Antud töö ülesandeks on analüüsida, kuidas muutuvad võrrandite numbrilised lahendid sõltuvalt erinevaid gravitatsiooniteooriaid iseloomustavatest funktsioonidest. Me vaatleme nende funktsioonide Taylori arendusi üldrelatiivsusteooria lähedal teooriate ruumis, kus erinevad teooriad on iseloomustatud funktsioonide erinevate konstantsete väärtustega. Pythoni programmi abil me numbriliselt lahendame väljade võrrandeid erinevate konstantide väärtustega ja joonistame graafikuid lahenditest, et visualiseerida nende käitumist.

Peatükk 1

Teoreetiline ülevaade

1.1 Newtoni gravitatsiooniseadus

Klassikalises füüsikas kirjeldab kahe keha vahelist gravitatsioonijõudu Newtoni gravitatsiooniseadus:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

kus F on gravitatsioonijõud, G on gravitatsioonikonstant, m_1 ja m_2 on esimese ja teise keha massid, r on kehadevaheline kaugus. Newtoni seadus väidab, et gravitatsiooniväli on potentsiaalne väli. Antud valemi diferentsiaalne kuju on Poissoni võrrand:

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad (1.2)$$

kus φ on potentsiaal ja Δ on Laplace'i operaator. Seda teooriat on siiani laialt kasutatud paljude probleemide lahendamiseks ja ta annab hea lähendusega ennustusi. Kuid Newtoni teooria ei kehti, kui kiirused on valguse kiiruse lähedased või kui gravitatsiooniväljad on väga tugevad, $GM/c^2 r > 1$.

1.2 Üldrelatiivsusteooria

1915.–1916. aastatel esitas Einstein uue gravitatsiooniteooria – üldrelatiivsusteooria. Tänapäevaks see on kõige edukam gravitatsiooniteooria, mis ennustab paljusid katsetulemusi. Einsteini töö põhineb ekvivalentsusprintsiiбил, mis tähendab, et gravitatsiooniseaduses esinev mass ja inertsiseaduses esinev mass on identsed. Üldrelatiivsusteooria põhivõrrandiks on Einsteini

võrrand [1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Siin

- c on valguse kiirus vaakumis,
- G on gravitatsioonikonstant,
- $R_{\mu\nu}$ on Ricci tensor ja võrrandi vasak pool $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ määrab aegruumi kõveruse,
- $T_{\mu\nu}$ on energia-impulsi tensor, mis kirjeldab aine energia ja impulssi. See on gravitatsioonivälja allikaks. Juhul kui $T_{\mu\nu} = 0$ ja $R_{\mu\nu} = 0$, siis Einsteini võrrand kirjeldab olukorda, kui ainet ei ole — vaakumit,
- Λ on kosmoloogiline konstant.

1.3 Kosmoloogiline konstant

Einsteini esialgses võrrandis kosmoloogilist konstanti ei olnud. Kuna ilma Λ -ta võrrand kirjeldab ajas muutuvat universumit, siis 1917. aastal Einstein lisas selle liikme juurde selleks, et võrrandil oleks staatiline lahend. Kuid 1929. aastal Hubble avastas, et galaktikad liiguvad üksteisest eemale, universum on paisuv. Tulemusena võeti $\Lambda \neq 0$. [2][3]

1970-ndatel nähti, et $\Lambda g_{\mu\nu}$ võib interpreteerida kui vaakumi energia-impulsi tensorit. Pärast kiireneva paisumise avastamist 1998. aastal postuleeriti tumeenergia olemasolu ja seda seoti Λ -ga. Λ vaatluslikku väärtust ei osata seni veel teoreetiliselt tuletada. Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria idee on teha Λ dünaamiliseks suuruseks, mille väärtus võrdub skalaarvälja potentsiaali väärtusega ja mille praegune väärtus tuleb arvutada vastavatest väljavõrranditest.[2][3]

1.4 Robertson-Walkeri meetrika

Universum on isotroopne ja homogeenne. Isotroopsus tähendab, et ruumi omadused ei sõltu suunast. Homogeensus tähendab, et kõik ruumipunktid on samaväärsed. Isotroopsed ja homogeenused kolmemõõtmelised ruumid on tasane ruum, kolmemõõtmeline sfäär ja

hüperboloid. Kolmemõõtmelisele sfääri meetrika saab kirja panna järgmiselt:

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.4)$$

kus θ , χ , φ on nurkkoordinadid. Need kolm võimalikku meetrikat on võimalik ühiselt kirja panna järgmiselt:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\sigma^2, \quad k = \pm 1, 0. \quad (1.5)$$

Kui me lisame aja homogeensuse nõude, siis meetrika saab 4-mõõtmeliseks ja võtab kuju:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dl^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (1.6)$$

kus konstant k määrab ruumi hüperpinna kõveruse:

- kui $k = 0$, kõverus puudub, siis seda nimetatakse tasaseks mudeliks,
- kui $k = 1$, kõverus on positiivne, siis seda nimetatakse sfääriliseks mudeliks,
- kui $k = -1$, kõverus on negatiivne, siis seda nimetatakse hüperboolseks mudeliks. [4]

Suurus $a(t)$ on kosmoloogilise aja t funktsioon, ta on dimensioonitu ja teda nimetatakse mastaabikordajaks.

1.5 Friedmanni võrrandid

Friedmann oma artiklis 1922. aastal pakkus välja 3 lahendit erinevate k väärtuste jaoks, mis andsid Einsteini võrrandite mittetatsionaarsed lahendid. Friedmann tegi järgmised eeldused: aine ei liigu ruumilise koordinaadisüsteemi suhtes, aeg on ortogonaalne ruumi hüperpinnaga, ruumil on konstantne kõverus, ruumilised kaugused sõltuvad ajast. Oma võrrandite tuletamiseks Friedmann kasutas Einsteini võrrandeid vedeliku jaoks, mille rõhk P ja tihedus ρ olid teada [5], [6].

Kahe punkti infinitesimaalselt väike vahekaugus sellises neljamõõtmelises aegruumis kosmoloogilise ajaga ja ruumiliste polaarkoordinaatidega on

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \quad (1.7)$$

[1]

Asendades selle meetrika üldrelatiivsusteooria võrrandisse (3) juhul, kui $\Lambda \neq 0$ saab tuletada 3

kosmoloogilist võrrandit $a(t)$ jaoks.

Energia võrrand:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (1.8)$$

Liikumisvõrrand:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (1.9)$$

Mateeria pidevuse võrrand:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right). \quad (1.10)$$

Siin ρ on mateeria keskmine tihedus universumis, P on rõhk, punkt tähistab tuletist aja järgi. P ja ρ sisaldavad kõikvõimalikke panuseid universumi energia tihedusse ja rõhku. [1]

Suhet $\frac{\dot{a}}{a}$ nimetatakse Hubble'i parameetriks; see on universumi paisumise normeeritud määr:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

. [1]

1.6 Biskalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria

Skalaartensortooriad on alternatiivsete gravitatsiooniteooriate tüüp, kus gravitatsiooni iseloomustatakse lisaks aegruumi meetrilisele tensorile ka skalaarväljaga. Biskalaar-tensortooriates tuuakse sisse kaks skalaarvälja.

Biskalaar-tensortooria mõjufunktsionaali võtame järgmisel kujul [7]:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{V_4} d^4x \sqrt{-g} \left(\Psi R - Z g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\omega}{\Psi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - 2\kappa^2 U \right) + S_m[g_{\mu\nu}, \chi_m] \quad (1.11)$$

kus

- κ^2 on gravitatsioonikonstandi muutumatu osa, S_m on mateeria panus,
- Ψ ja ϕ on skalaarväljad,
- R on Ricci skalaar, mis tuleb kõverustensorist,
- Z ja ω on funktsioonid skalaarväljadest,

- U on skalaarväljade potentsiaal — omamõju,
- $d^4x\sqrt{-g}$ on ruumi element (integreerimine käib üle 4-mõõtmelise ruumi),
- $S_m[g_{\mu\nu}, \chi_m]$ on materia mõjufunktsionaal,
- $g_{\mu\nu}$ on aegruumi meetrika.

Peatükk 2

Üldrelatiivsusteooriast vähe erinevate biskalaar-tensorteooriate kosmoloogilised võrrandid

Vaatlustest on teada, et Universum on tasane ja $k = 0$. Friedmanni võrrandid biskalaar-tensorteoorias on võimalik kirjutada järgmisel kujul [8]:

$$H^2 = -H\frac{\dot{\Psi}}{\Psi} + \frac{\omega}{6}\frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} + \frac{Z}{6}\frac{\dot{\phi}^2}{\Psi} + \frac{1}{3}\frac{\kappa^2(U + \rho)}{\Psi}, \quad (2.1)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} - 2H\frac{\dot{\Psi}}{\Psi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} - \frac{Z}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\Psi} + \frac{\kappa^2(U - w\rho)}{\Psi}, \quad (2.2)$$

$$\ddot{\Psi} = -3H\dot{\Psi} - \frac{1}{2\omega + 3} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\Psi}\dot{\Psi}^2 + Z\dot{\phi}^2 + 2\frac{\partial\omega}{\partial\phi}\dot{\phi}\dot{\Psi} - \Psi\frac{\partial Z}{\partial\Psi}\dot{\phi}^2 \right) + \quad (2.3)$$
$$+ \frac{2\kappa^2}{2\omega + 3} \left(2U - \Psi\frac{\partial U}{\partial\Psi} - \frac{\rho}{2}(3w - 1) \right),$$

$$\ddot{\phi} = -3H\dot{\phi} + (Z^{-1}) \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial\phi}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2\Psi}\frac{\partial\omega}{\partial\phi}\dot{\Psi}^2 - \frac{\partial Z}{\partial\Psi}\dot{\phi}\dot{\Psi} - \kappa^2\frac{\partial U}{\partial\phi} \right]. \quad (2.4)$$

Siin on eeldatud, et $P = w\rho$, kus barotroopne indeks $w = \text{const}$. Võrrandites esinevad

funktsioonid kirjutatakse ümber uute tähistustes [8]:

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{1}{2\omega(\Psi, \phi) + 3} \right) = A(\Psi, \phi), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2\omega(\Psi, \phi) + 3} \right) = \mathcal{A}(\Psi, \phi), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{1}{Z(\Psi, \phi)} \right) = B(\Psi, \phi), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{Z(\Psi, \phi)} \right) = \mathcal{B}(\Psi, \phi), \quad (2.8)$$

$$\pm 3 \sqrt{\frac{\kappa^2 U(\Psi, \phi)}{3\Psi}} = C(\Psi, \phi), \quad (2.9)$$

$$2\kappa^2 \left(2U(\Psi, \phi) - \frac{\partial U(\Psi, \phi)}{\partial \Psi} \Psi \right) = W(\Psi, \phi), \quad (2.10)$$

$$\kappa^2 \frac{\partial U(\Psi, \phi)}{\partial \phi} = \mathcal{W}(\Psi, \phi). \quad (2.11)$$

Nende funktsioonide väärtused võetakse vaatluse alla juhul, kui võrrandid erinevad vähe üldrelatiivsusteooriast. Täpsemalt, leitakse nende funktsioonide Taylori arendused üldrelatiivsusteooria väärtuste ümbruses ja otsitakse võrrandite lahendeid skalaarväljade väikeste häirituste jaoks. Funktsioonide väärtused kohal, mille lähedal vaadatakse väikesi häiritusi, on konstantsed; erinevad väärtused vastavad erinevatele funktsioonidele ja seega erinevatele biskalaar-tensorteooriatele.

Lisaks, on valitud olukord, kus domineerib skalaarne potentsiaal ja mateeria on 0. See tähendab, et võrrandis (1.11) liige $S_m[g_{\mu\nu}, \chi_m]$ võrdub nulliga. Saab näidata, et biskalaar-tensorteooria võrrandid ühtivad üldrelatiivsusteooria võrranditega juhul, kui $\frac{1}{\omega} \rightarrow 0$ ja $\frac{1}{Z} \rightarrow 0$. Need tingimused määravad skalaarväljade väärtused, mille ümber teeme Taylori arendused ja uurime väikeste häirituste $\Psi = \Psi_0 + x_1$, $\phi = \phi_0 + x_2$ käitumist [8]:

$$\ddot{x}_1 = -C\dot{x}_1 + AWx_1 + \mathcal{A}Wx_2 + \frac{(A\dot{x}_1 + 2\mathcal{A}\dot{x}_2)\dot{x}_1}{2(Ax_1 + \mathcal{A}x_2)} - \frac{B\Psi(Ax_1 + \mathcal{A}x_2)\dot{x}_2^2}{(Bx_1 + \mathcal{B}x_2)^2}, \quad (2.12)$$

$$\ddot{x}_2 = -C\dot{x}_2 - B\mathcal{W}x_1 - \mathcal{B}\mathcal{W}x_2 + \frac{(2B\dot{x}_1 + \mathcal{B}\dot{x}_2)\dot{x}_2}{2(Bx_1 + \mathcal{B}x_2)} - \frac{\mathcal{A}(Bx_1 + \mathcal{B}x_2)\dot{x}_1^2}{4\Psi(Ax_1 + \mathcal{A}x_2)^2}. \quad (2.13)$$

Kõik suurte tähtedega tähistatud suurused on konstandid, vastavate funktsioonide väärtused kohal (Ψ_0, ϕ_0) .

Siin $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ on häirituste väärtused funktsioonidena ajast. Kuna ei olnud võimalik saada nende võrrandite analüütilisi lahendeid, leiame edasises töös nende võrrandite numbrilised lahendid ja vaatame, kuidas häirituste väärtused sõltuvad konstantidest $A, \mathcal{A}, B, \mathcal{B}, C, W, \mathcal{W}$.

Peatükk 3

Metodoloogia

Antud teooria analüüsimiseks lahendati võrrandid (2.12) ja (2.13), seejärel joonestati graafikud. Hiljem tehti järeldused selle kohta, kuidas antud tulemused on kooskõlas reaalsusega.

Võrrandite lahendamiseks tuli kõigepealt asendada teist järku diferentsiaalvõrrandid esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemiga. Tulemusena saadi süsteem neljast võrrandist, mis lahendati Python 3 teekide abil.

Üheks kasutatud teegiks on NumPy. See on teaduslik pakett, mis sisaldab keerulisemaid algebralisi funktsioone ja võimaldab luua ARRAY tüüpi ridasid. Nad võtavad vähem ruumi kui Pythoni sissehitatud read, on kiiremad ja nendega on võimalik teha algebralisi tehteid.

Teine pakett, mis oli kasutuses, on scipy.integrate. See pakett sisaldab funktsiooni odeint, mille abil me integreerime antud võrrandeid. Odeint funktsioon kasutab LSODA FORTRAN odepack kogust [9]. LSODA on harilike diferentsiaalvõrrandite lahendaja. LSODA lahendab võrrandit kujul $dy/dt = f$. See sobib nii jäikade kui ka mittejäikade võrrandisüsteemide lahendamiseks. Programm alustab lahendamist eeldades, et võrrandid ei ole jäigad, kuid hiljem kontrollib, kuidas võrrandite lahendid käituvad ja vajadusel vahetab lahendusmeetodit [10]. (Jäikade defferentsiaalvõrrandite lahendamiseks on vaja võtta väikesed integreerimissammud. Sel põhjusel neid ei saa lahendada ilmsete meetoditega, kuna järjest suureneb sammude arv või viga sõltuvalt sammude suurusest.) Mittejäikade võrrandite lahendamiseks kasutatakse Adamsi meetodit [10]. See on mitmesammuline meetod, mis põhineb iteratsioonil. Selleks, et leida väärtus y_{k+1} Adamsi meetodil, kasutatakse väärtusi eelmistel ajahetkedel y_k, y_{k-1} . Kahesammulise meetodi puhul [11]:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dy/dt \cdot dt. \quad (3.1)$$

Jäikade võrrandite lahendamiseks kasutatakse BDF (inglise keelest Backward Differentiation Formula - tagurpidi diferentseerimise valem) meetodit. See meetod on sarnane Adamsi meetodiga. See kasutab ka varasemaid väärtuseid ja interpolatsiooni selleks, et leida lähendav funktsioon tuletisele ajal t_n [12]:

$$y(t) \approx y(t_n) + (t - t_n) \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (3.2)$$

Näeme, et sel juhul lähendatakse tuletist avaldisega $\frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$.

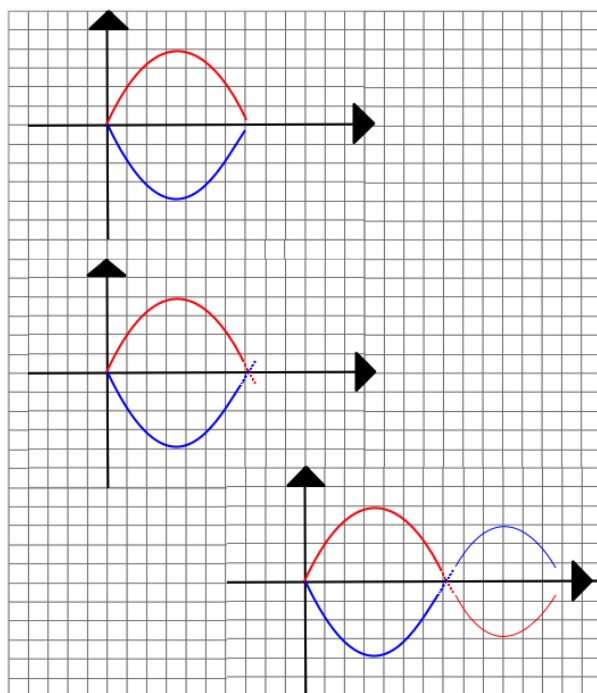
Graafikute joonestamiseks kasutati paketti matplotlib.

Võrrandites (2.12) ja (2.13), juhul kui x_1 ja x_2 on 0 või nulli lähedased, tekib määramatus $\left(\frac{0}{0}\right)$. Selleks, et saada x_1 ja x_2 väärtused kindlas vahemikus ja vältida määramatusi, töötati välja meetod, mis võimaldab jätkata võrrandite lahendamist pärast singulaarsuspunkti teket, käivitades programmi mitu korda erinevate algtingimustega.

Esiteks lahendame võrrandeid valitud algtingimustega ajavahemikus $a - b$ soovitatud sammude arvuga i . Kui selles ajavahemikus määramatus ei teki, suurendame ajavahemikku ja sammude arvu. Kui tekib määramatus, siis salvestame x_1 ja x_2 väärtused enne määramatuse teket. Leiame sammude arvu j enne määramatuse teket. See võimaldab meil leida aja, mis saab võrrandi edasise lahendamise uueks alghetkeks:

$$t = \frac{j(b - a)}{i}. \quad (3.3)$$

Lahendame võrrandid uute algväärtustega, milleks on nüüd x_1, x_2 ja nende tuletiste viimased väärtused enne määramatuse teket. Kui graafikust on näha, et mõned jooned lähevad läbi telje $y = 0$ muudame vastavate algväärtuste märgid. Ajavahemikuks valime intervalli $(j) - (j + (b - a))$, sammude arv jääb samaks. Kordame seda kuni jõuame statsionaarse lahendini. Joonisel 3.1. on kujutatud esimest kolm sammu programmi käivitamises. Üleval on kujutatud funktsioonide väärtused enne singulaarsuse punkti jõudmiseni. Praktikas, tavaliselt esimesel graafikul nad jõuavad null punkti, kuid me salvestame lahendused ainult enne seda hetke. Seejärel võtame algväärtusteks eelvimase (enne määramatuse punkti) sammu väärtused ja muudame nende märgid. Selle tulemuse näitab keskmine graafik. Punktiir joon näitab selle vahemiku, mille me astume üle ja sel vahemikul me programmi ei käivita. Viimasel graafikul on tulemus, mida saame pärast teist käivitamist uute algväärtustega. Sellisel viisil jätkame kuni graafik ei saa statsionaarseks või kuni veendume selle käitumise tendentsis.



Joonis 3.1: Võrrandite lahendamise protseduur juhul kui esineb määramatus.

Selleks, et veenduda, et funktsioonide väärtused enam ei muutu, leiame teise tuletise x_1 ja x_2 jaoks. Kui teine tuletis läheb nulli, siis x_1 , x_2 ja nende tuletised enam ei muutu. Tuletise arvutamiseks kasutame funktsiooni teaduslikust paketist NumPy – np.gradient. Antud funktsioon kasutab keskvahe valemit tuletise leidmiseks (central difference) [9]. Selle valemi järgi lähendame $y(t)$ väärtuse polünoomiga võttes sümmeetriliselt väärtused t mõlemalt poolt, eeldusel, et vahemik on piisavalt väike.

$$f(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} = f_{n+1/2} - f_{n-1/2}. \quad (3.4)$$

Eeldame, et $f \in C^3[a, b]$ ja $t-h, t+h \in [a, b]$.

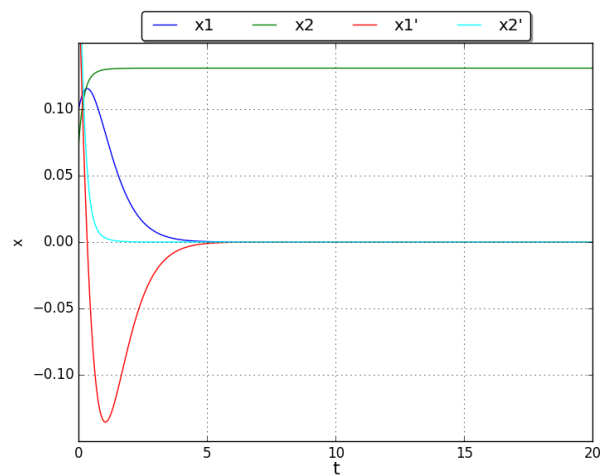
Peatükk 4

Meetodi valideerimine

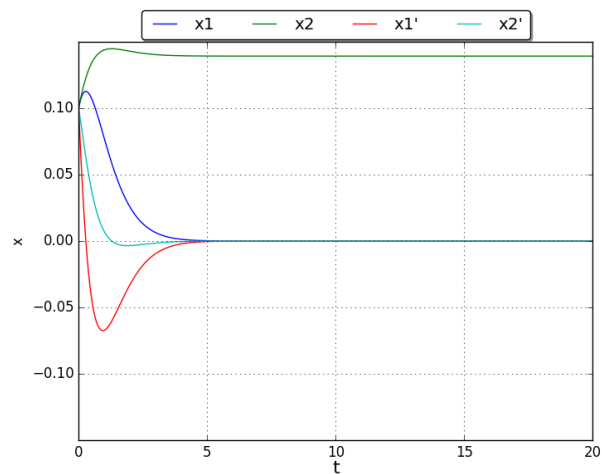
Selleks, et kindlaks teha, et antud arvutuste skeem kehtib, vaatame, kas numbrilised graafikud on kooskõlas analüütiliste lahenditega, mis avaldub erijuhul Besseli funktsioonide kaudu [8]. See analüütiline lahend oli leitud olukorra jaoks, kui konstandid \mathcal{A} , \mathcal{B} ja \mathcal{W} on nullid (ω , Z , V ei sõltu teisest skalaarväljast). Selleks, et võrrelda neist lahenditest saadavaid $x_1(t)$, $x_2(t)$ graafikuid otse numbrilisest integreerimisest saadud graafikutega teeme järgmised sammud:

- Valime konstantide A , B , C , W väärtused samad nii analüütiliste lahendite jaoks kui ka numbriliste lahendite jaoks: $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$, $W = -2$ ja $\Psi = 1$. Ψ on võrrandites 2.12 ja 2.13 esinev ühe skalaarväljast väärtus.
- Valime funktsioonide algväärtused: $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.1$, $\dot{x}_1 = 0.1$, $\dot{x}_2 = 0.1$, see valik on tingitud nõudest, et algväärtused oleks lähedal valitud punktile skalaarväljade ruumis, mille ümber tehakse Taylori ritta arendus.
- Arvutame välja analüütilises lahendis esinevad integreerimiskonstandid [8].

Joonistame analüütiliste lahendite graafikud 4.1 ja võrdleme neid numbrilisest integreerimisest saadud graafikutega 4.2.

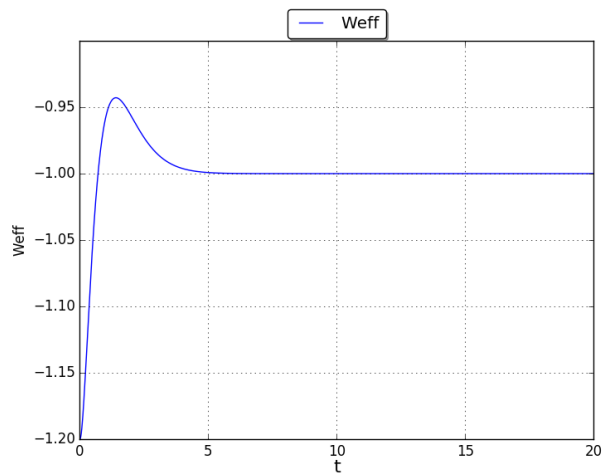


Joonis 4.1: Analüütiliselt saadud graafik.



Joonis 4.2: Numbriliselt saadud graafik.

Siin ja edaspidi on graafikute horisontaalteljel kosmoloogiline aeg. Antud graafikud on piisavalt sarnased, et saaksime kinnitada numbriliste integreerimiste skeemi rakendatavust. Eriti oluline on see, et hilisemal ajal nad ühtivad. Graafikute erinevus võib tuleneda analüütilises meetodis tehtud lihtsusttest või numbrilise meetodi ebatäpsusest.



Joonis 4.3: Barotroopne indeks.

Leiame selle mudeli jaoks barotroopse indeksi. Barotroopne indeks on mateeria eeldatavas olekuvõrrandis esinev konstant: $p = w\rho$. Kui kosmoloogilist konstanti Friedmanni võrrandites vaadelda mateeriana, siis saab tuletada, et sellele vastav barotroopne indeks peaks võrduma (-1) -ga. [13] Skalaartensorteooriates on efektiivne barotroopne indeks defineeritud Hubble'i parameetri kaudu. Selle väärtus peaks vastama Friedmanni võrranditest tuletatud väärtusele. Seega on oluline, et saadud barotroopse indeksi väärtus on teooriaga kooskõlas. Lisaks, meie graafikut saab võrrelda varasemalt ühe skalaarväljaga mudeli jaoks saadud barotroopse indeksi graafikuga [14]. Mõlemate graafikute kuju on lähedane teineteisele ja aja möödudes saavad nad võrdseks.

Peatükk 5

Nubriliste meetodite rakendus

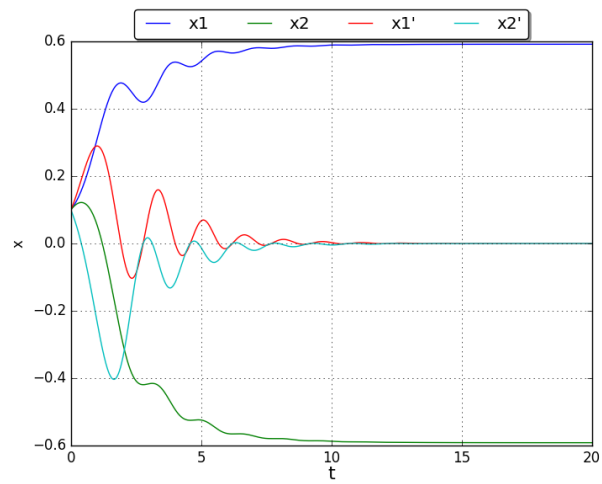
Nüüd on võimalik kirjeldatud meetodit rakendada keerulisema olukorra jaoks. Huvipakkuv on lahend, mille puhul nii häiritused kui ka häirituste tuletised läheneksid aja kasvades nullile. See võimaldaks saada realistlikke kosmoloogia mudeleid, mis oleks kooskõlas üldrelatiivsusteooriaga Päikesesüsteemi piirides.

Kuna analüütilist lahendit ei olnud võimalik leida raskema olukorra jaoks, kui funktsioonid sõltuvad mõlemast skalaarväljast, on nubriliste lahendite jaoks parameetrite väärtused valitud intuiitselt ja nii, et edaspidi oleks lihtsam võrrelda nende muutuste mõju. Selleks et vältida nulliga jagamist, ei saa konstantide paarid A ja \mathcal{A} , B ja \mathcal{B} , W ja \mathcal{W} olla erinevate märkidega ja sama mooduli väärtusega, sest singulaarsus nulliga jagamise tõttu tekib juba esimesel ajasammul.

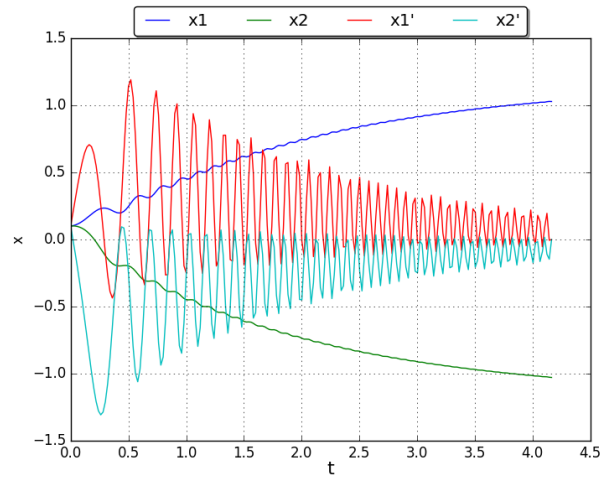
Nubrilise integreerimise jaoks valime funktsioonide algväärtused: $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.1$, $\dot{x}_1 = 0.1$, $\dot{x}_2 = 0.1$.

5.1 Sümmeetrilised graafikud

Kõige tüüpilisemaks tulemuseks on graafik, kus x_1 ja x_2 kasvavad võnkuvalt ja mingi aja pärast jäävad statsionaarseks, nende tuletised sel ajal sumbuvalt võnguvad ja saavad nullideks. Käivitades simulatsiooni erinevate parameetritega veendume, et saame sümmeetrilise alguses võnkuva ja edaspidi konstantseks mineva graafiku juhul, kui võtame konstantide paarid A ja \mathcal{A} , B ja \mathcal{B} , W ja \mathcal{W} samade väärtustega. Kusjuures, muutes samaaegselt kõikide konstantide märke, graafik ei muutu. Kui me suurendame konstantide A ja \mathcal{A} , B ja \mathcal{B} , W ja \mathcal{W} moodulite väärtuseid, võnkumiste arv suureneb. Seda saab näha joonistelt 5.1 ja 5.2.

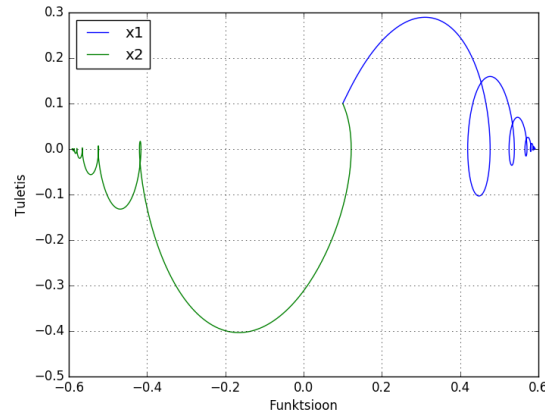


Joonis 5.1: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} = 1$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$



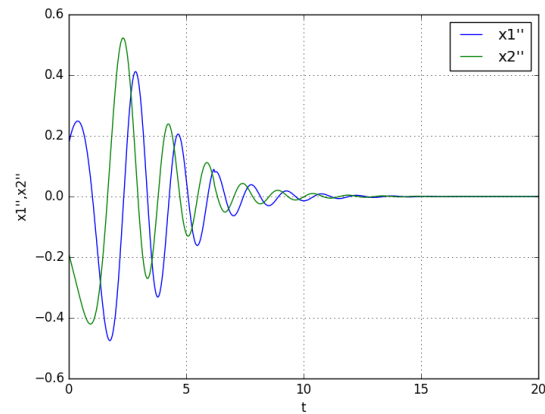
Joonis 5.2: $A = -5$, $\mathcal{A} = -5$, $B = -5$ ja $\mathcal{B} = -5$, $W = -5$ ja $\mathcal{W} = -5$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Selleks, et kindlaks teha, et häiritused saavutavad lõpuks konstantsed väärtused ja tuletised koonduvad nulli, esitame sama informatsiooni, mis on esimesel graafikul, teisel kujul – joonistame faasidiagrammi 5.3 ja teise tuletise sõltuvuse ajast 5.4.



Joonis 5.3: Faasidiagramm $A = -5$, $\mathcal{A} = -5$, $B = -5$ ja $\mathcal{B} = -5$, $W = -5$ ja $\mathcal{W} = -5$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Faasidiagrammil on horisontaalteljel funktsioonid x_1 ja x_2 , vertikaalteljel on nende tuletised \dot{x}_1 ja \dot{x}_2 .



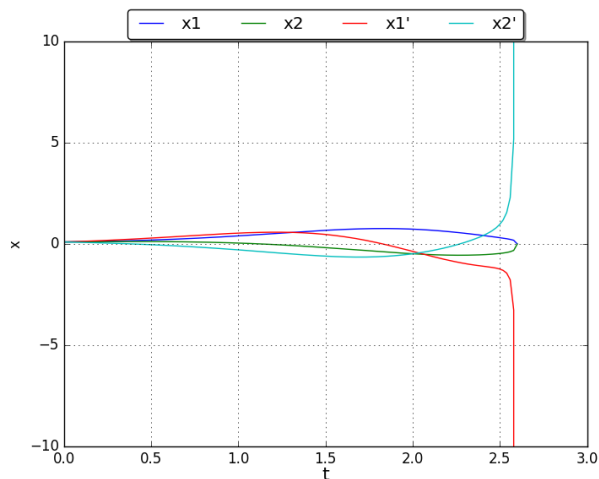
Joonis 5.4: $A = -5$, $\mathcal{A} = -5$, $B = -5$ ja $\mathcal{B} = -5$, $W = -5$ ja $\mathcal{W} = -5$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Näeme, et see mudel ei sobi meile eriti hästi. Selleks, et antud mudel läheneks üldrelatiivsusteooriale, peaksid häiritused ja nende tuletised lõpuks lähenema nullile. Lisaks, võime võrrelda saadud faasidiagramme varasemate tulemustega ühe välja mudeli jaoks. On teada mitu faasidiagrammi tüüpi, kuid kõik nad tiirlevad ümber algpunkti [15]. Meie poolt saadud faasidiagramm ei ole nendega kooskõlas.

Nüüd hakkame järjestikku varieerima konstantide väärtuseid. Alustame olukorrast, kus $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} = 1$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$.

5.2 Varieerime A ja \mathcal{A}

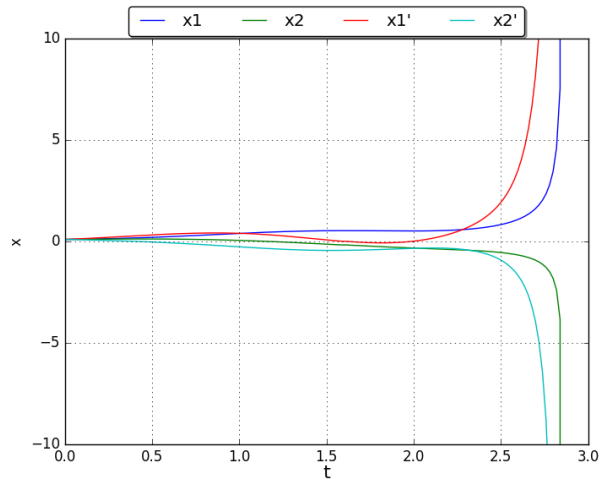
Suurendades A kahekordselt, jättes teised konstandid samaks, näeme, et tekib singulaarsus – väga kiiresti lähevad tuletised lõpmatusse, x_1 ja x_2 lähevad nulli. Teised tuletised lähevad samuti lõpmatusse. Seda on näha jooniselt 5.5.



Joonis 5.5: $A = 2$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} = 1$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

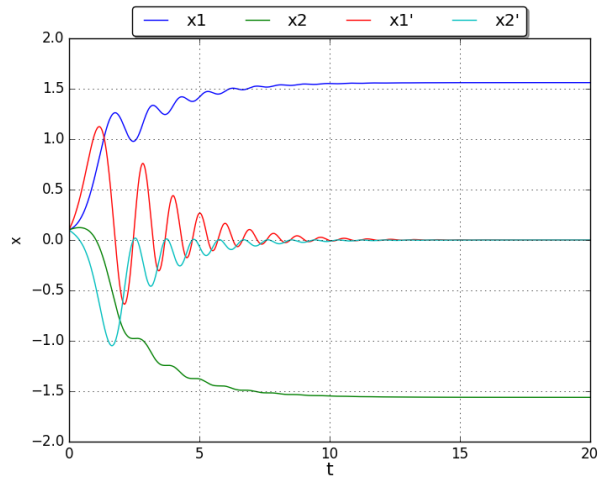
Niisuguse käitumise põhjuseks on see, et võrrandites tekib nulliga jagamine. Sõltumatult algväärtuste märgist võtavad x_1 ja x_2 hiljem vastasmärgilised väärtused. Suurenedes A suureneb võnkumiste amplituud ja x_1 ja x_2 lähenevad nullile. Lisaks mida suurem on A väärtus võrreldes \mathcal{A} -ga seda väiksema väärtuse võtab aja jooksul x_1 võrreldes x_2 -ga. Seega kui x_1 ja x_2 on nulli lähedal, muutuvad võrrandis liikmed $2(Ax + \mathcal{A}x)$ ja $4\Psi(Ax + \mathcal{A}x)^2$ väga väikesteks ja nendega jagamine tekitab lõpmatuse.

Võttes A negatiivseks saame graafiku, kus x_1 ja tema tuletis kipuvad +lõpmatusse, kuid x_2 ja tema tuletis –lõpmatusse 5.6.



Joonis 5.6: $A = -2$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} = 1$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Nüüd muudame \mathcal{A} koos A -ga. Sel juhul x_1 ja x_2 mõlemad võtavad $\frac{A_{uus}}{A}$ korda suuremad väärtused 5.7. Graafik on laiem ja võnkumiste arv suureneb $\frac{A_{uus}}{A}$ korda. Singulaarsust enam ei teki, sest muutujad jäävad piisavalt suureks, et nede vahe ei oleks nulli lähedane.

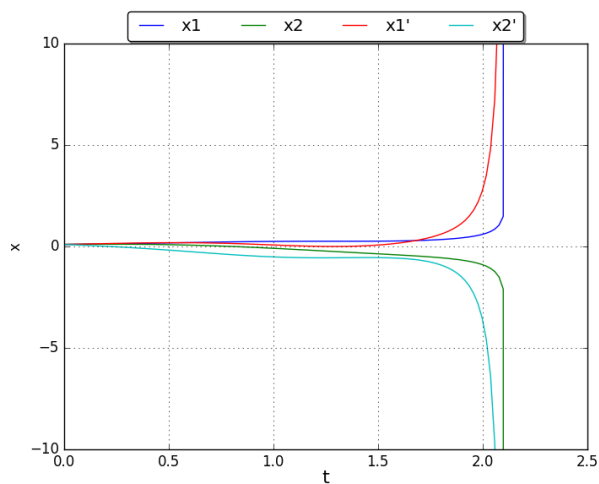


Joonis 5.7: $A = 3$, $\mathcal{A} = 3$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} = 1$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Kui me muudame ainult \mathcal{A} jättes $A = 1$ saame joonisega 5.6 analoogse tulemuse juhul, kui anname \mathcal{A} -le positiivse väärtuse. Vastasel juhul saame sellist tüüpi singulaarse, kus x_2 liigub nulli, x_1 ja mõlemad tuletised kipuvad positiivsesse lõpmatusse.

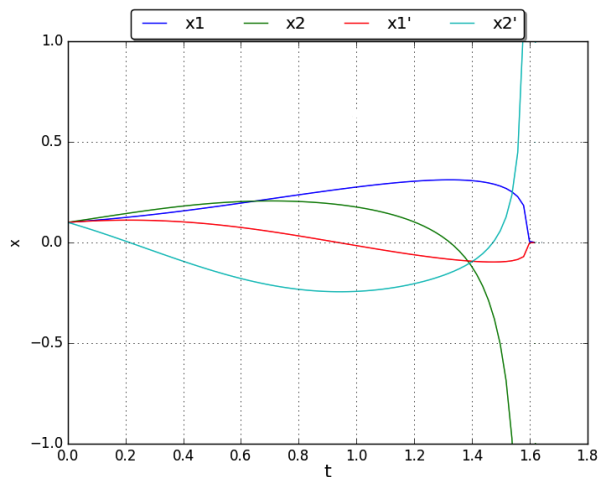
5.3 Varieerime B ja \mathcal{B}

Järgmisena võtame B väärtuseks 3. Sellisel juhul funktsioonid ja tuletised kasvavad lõpmatult alates ajahetkest 1.5. Sarnaselt A olukorra põhjusega tekib nulliga jagamise tõttu singulaarsus. Liikmed $2(Bx + \mathcal{B}x)$ ja $(Bx + \mathcal{B}x)^2$ võrduvad nulliga. Seda olukorda kirjeldab joonis 5.8.



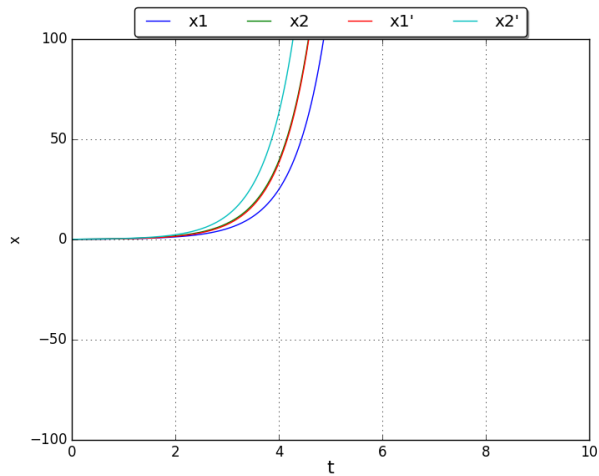
Joonis 5.8: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 3$ ja $\mathcal{B} = 1$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Kui me varieerume ainult \mathcal{B} siis x_2 ja tema tuletis liiguvad \pm lõpmatusse, x_1 ja tema tuletised kipuvad nulli. Näeme seda joonise 5.9 näitel. Sellisel juhul me ei saa meie meetodil alustada simulatsiooni järmisest hetkest, et pikendada graafikut.



Joonis 5.9: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} = 3$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

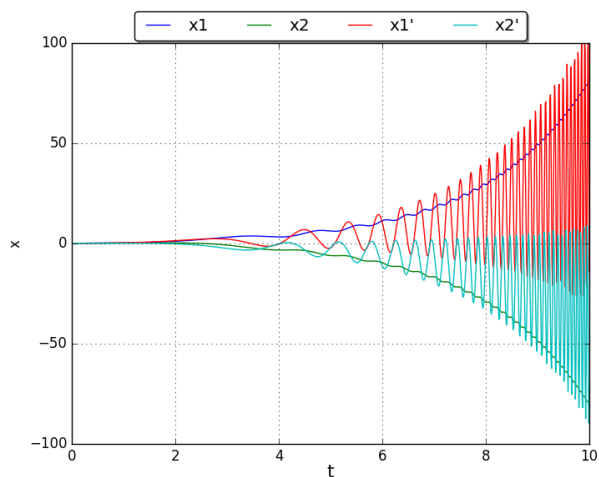
Negatiivse B või \mathcal{B} puhul kõik 4 väärtust suunduvad positiivsesse lõpmatusse.



Joonis 5.10: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = -3$ ja $\mathcal{B} = 1$ või $B = 1$ ja $\mathcal{B} = -3$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

5.4 Varieerime C

Konstanti C saab väljendada Hubble'i parameetri kaudu. C sõltub potentsiaalist, kui ta on negatiivne – Universum paisub, kui positiivne – tõmbub kokku. Seega C on võrrandites sumbumisteguri rollis. Kui $C > 0$ on tegemist sumbuva võnkumisega. Kui $C < 0$ on võnkeamplituud kasvav.

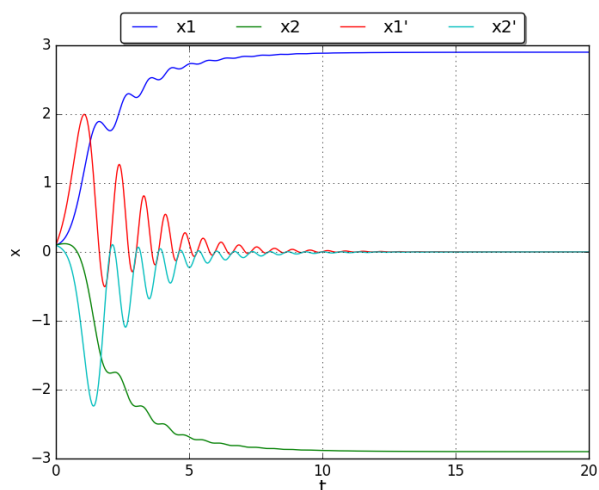


Joonis 5.11: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} = 1$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = -0.5$, $\Psi = 1$

5.5 Varieerime W ja \mathcal{W}

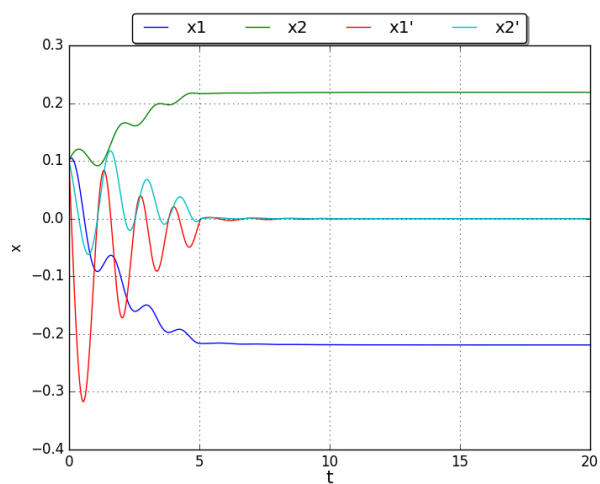
W ja \mathcal{W} kirjeldavad skalaarset potentsiaali $U(\psi, \phi)$ ja tema tuletisi. Simulatsioonist tuleb välja, et W ja \mathcal{W} on ainukesed konstandid, mida saab ühekaupa muuta ja vältida singulaarsuse teket.

Kui $W = 5$, me saame tavalise graafiku, kuid x_1 ja x_2 saavad 5 korda suuremaks võrreldes olukorraga, kui $W = 1$ ja teised konstandid on samad. Võnkumiste arv suureneb samuti. Joonis 5.12 illustreerib seda olukorda.



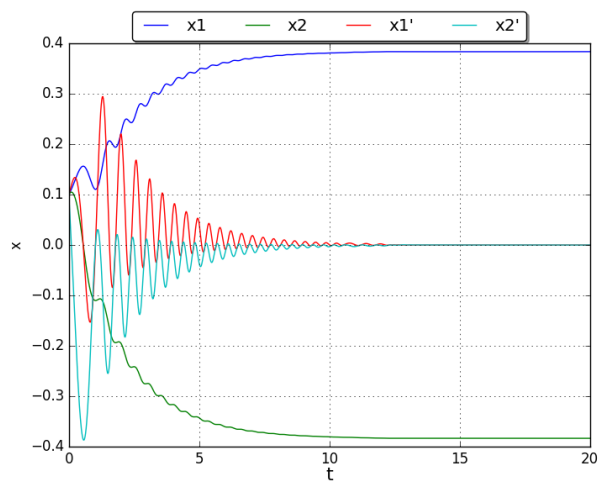
Joonis 5.12: $A = 1, \mathcal{A} = 1, B = 1$ ja $\mathcal{B} =$, $W = 5$ ja $\mathcal{W} = 1, C = 0.5, \Psi = 1$

Juhul kui võtta W negatiivseks, saame graafiku, kus x_1 ja x_2 vahetavad märgid: x_1 saab aja jooksul negatiivseks, ja x_2 saab aja jooksul positiivseks. Lisaks x tuletise võnkumise amplituud on märgatavalt suurem, mis tähendab, et W muutus mõjutab x_1 käitumist rohkem kui x_2 (joonis 5.13).



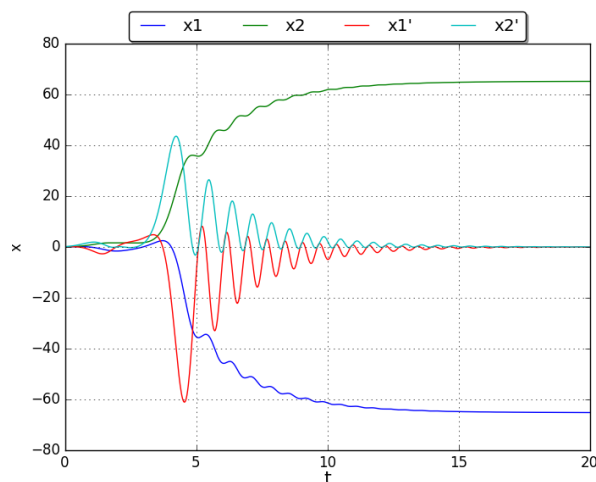
Joonis 5.13: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} =$, $W = -5$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Muutes \mathcal{W} x_1 ja x_2 lõppväärtused vähenevad, kuid võnkumiste arv suureneb.



Joonis 5.14: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} =$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 5$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Võttes \mathcal{W} väärtuse negatiivseks saame pildi, mida ei olnud varem näha – joonis 5.15.



Joonis 5.15: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} =$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = -5$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

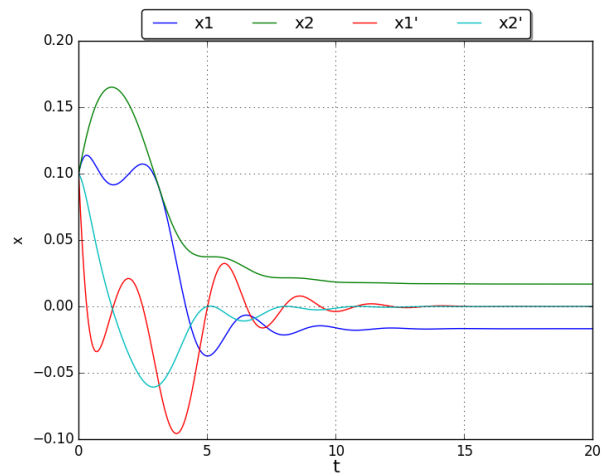
Kui me muudame mõlema konstandi väärtuseid, võnkumiste arv suureneb, tingimusel, et nende märgid on samad. x_1 ja x_2 väärtused erinevad vähe olukorrast, kui W ja \mathcal{W} olid 1. Põhjuseks on see, et W ja \mathcal{W} esinevad võrrandites erinevate märkidega, seega kui nad mõlemad omavad suurt positiivset või negatiivset väärtust, siis mõlemad konstandid tasakaalustavad üksteist.

Olukorras kus me võtame \mathcal{W} väärtuseks 5 ja W väärtuseks -5 , on võnkumiste arv väiksem, x_1 ja x_2 võtavad palju suuremad väärtused ∓ 250 . See toimub sest \mathcal{W} esineb võrrandis miinusmärgiga, seega võttes tema väärtuse negatiivseks on see liige võrrandis positiivne, seega mõlemad konstandid on positiivsed ja enam ei mõju üksteise vastu.

5.6 Varieerime Ψ

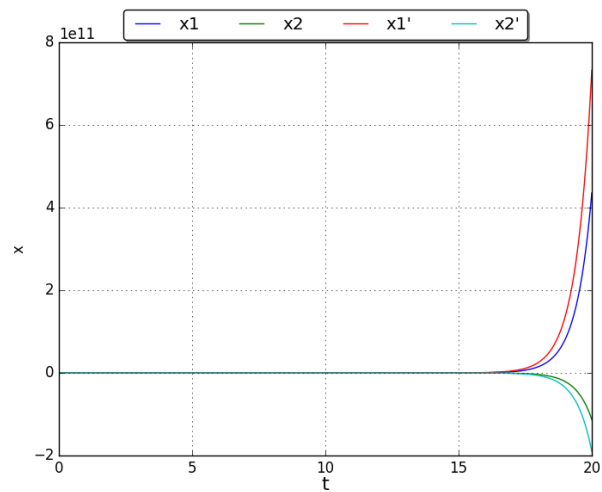
Ψ on ühe skalaarvälja väärtus kohas, mille ümber on tehtud Taylori arendus. Selle väärtuseks on võetud 1. Kontrollime, kuidas selle muutmine mõjutab häirituste käitumist.

Suurendades Ψ -d, funktsioonide võnkumiste arv kasvab ebaühtlaselt, kuid lõpus vaatamata muutustele saavutavad nad konstantsed väärtused.



Joonis 5.16: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} =$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = 1$, $C = 0.5$, $\Psi = 10$

Võttes Ψ väärtuse negatiivseks, saame graafiku, kus aja möödudes funktsioonid ja nende tuletised kasvavad järsult lõpmatusse, võnkumised sul juhul puuduvad.



Joonis 5.17: $A = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $B = 1$ ja $\mathcal{B} =$, $W = 1$ ja $\mathcal{W} = -5$, $C = 0.5$, $\Psi = 1$

Kokkuvõte

Selles bakalaureusetöös uuriti biskalaar-tensorteooria skalaarväljade häirituste numbrilisi lahendeid, kus häiritused kirjeldavad teooriate väikeseid erinevusi üldrelatiivsusteooriast. Erinevad teooriad on iseloomustatud funktsioonide (2.5)–(2.11) erinevate konstantsete väärtustega skalaarväljade ruumis kohal, mis vastab üldrelatiivsusteooriale ja mille ümber on tehtud skalaarväljade Tayloriga arendus.

Valitud meetodil komponeeriti võnkuvaid graafikuid mitmest osast, selleks et oleks võimalik jätkata graafikute joonistamist isegi siis, kui funktsioonid lähenevad nullile ja võrrandites tekib singulaarsus. Antud meetodi korrektsus oli kontrollitud analüütiliste lahendite vastavusega lihtsama olukorra jaoks. Tulemusena olid saadud analüütilise lahendiga sarnased graafikud ja efektiivse barotroopse indeksi sõltuvus kosmoloogilisest ajast. Numbriliste lahendite abil leiti graafikute sõltuvused parameetritest $A, \mathcal{A}, B, \mathcal{B}, C, W, \mathcal{W}$.

Leiti, et kahe skalaarvälja mõjul on üks domineeriv graafikute tüüp – alghetkel võnkuvad häiritused, mis hilisemal ajal võtavad konstantsed väärtused erinevate märkidega. Näidati, et konstantide paarid $A - \mathcal{A}$ ja $B - \mathcal{B}$ käituvad varieerimisel sarnaselt. Suurendades ühte konstanti, jättes teise muutmata, häiritused jooksevad nulli ja nende tuletised lõpmatusse või kõik 4 joont kasvavad lõpmatult. Seega, ei ole võimalik ükshaaval muuta $A, \mathcal{A}, B, \mathcal{B}$.

Nagu oligi oodata, negatiivse C puhul saadi kasvava võnkeamplituudiga graafik. Positiivse C juhul erinevalt ootustest võnkumine ei sumbunud, vaid x_1 ja x_2 väärtused jäid konstantseks, kuid seda saab põhjendada teiste funktsioonide mõjuga.

Skalaarset potentsiaali kirjeldavate funktsioonide W ja \mathcal{W} varieerimine ei muutnud graafiku kuju, kuid mõjutas võnkumiste amplituudi ja sagedust.

Skalaarvälja Ψ varieerimisest sõltub, kas saadud graafikud on võnkuvad, mis hiljem lähevad konstantseks, või järsult kasvavad jooned, mis on suunatud \pm lõpmatusse.

Tänuavaldused

Olen väga tänulik minu juhendajatele Piret Kuusele ja Simon Vigonskile töö kannatliku juhendamise eest; nende kasulikud nõuanded, töö edasiarenemise ideed ja abivalmidus tegid selle töö teostatavaks.

Yelyzaveta Tokareva

Kirjandus

- [1] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004. Google-Books-ID: 1SKFQgAACAAJ.
- [2] Sean M. Carroll. The Cosmological Constant. *Living Reviews in Relativity*, 4(1):1, December 2001.
- [3] Donald Goldsmith. *Einstein's Greatest Blunder?: The Cosmological Constant and Other Fudge Factors in the Physics of the Universe*. Harvard University Press, 1997.
- [4] V. A. Berezin. *Matematicheskie nachala kosmologii: kurs lekcij*. IYAI, 2009. Google-Books-ID: 7Nl8kgAACAAJ.
- [5] A. Friedmann. On the Curvature of Space. *General Relativity and Gravitation*, 31:1991, December 1999.
- [6] V. A. Fok. Raboty a.a. fridmana po teorii tyagoteniya einsteina. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 80(7):353–356, July 1963.
- [7] Manuel Hohmann, Laur Jarv, Piret Kuusk, Erik Randla, and Ott Vilson. Post-Newtonian parameter γ for multiscalar-tensor gravity with a general potential. *Physical Review D*, 94(12), December 2016. arXiv: 1607.02356.
- [8] Piret Kuusk, Laur Järv, and Erik Randla. Biscalar-tensor cosmology in the general relativity limit(valmimisel).
- [9] SciPy developers. SciPy documentation.
- [10] Alan Hindmarsh. ODEPACK Ordinary Differential Equation Solvers, February 2008.
- [11] CF Chan Man Fong and D. De Kee. *Advanced Mathematics for Applied and Pure Sciences*. CRC Press, January 1998. Google-Books-ID: VO7gK2fzdhUC.
- [12] Uri M. Ascher and Linda R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM, August 1998. Google-Books-ID: AqQ6QMthXkMC.

- [13] L. Fernández-Jambrina. Behavior of Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Singularities. *International Journal of Theoretical Physics*, 55(8):3537–3540, August 2016. arXiv: 1603.02837.
- [14] Laur Järv, Piret Kuusk, and Margus Saal. Scalar-tensor cosmologies with a potential in the general relativity limit: time evolution. *Physics Letters B*, 694(1):1–5, October 2010. arXiv: 1006.1246.
- [15] Jüri Engelbrecht and Anu Uus. *Mittelineaarne dünaamika ja kaos*. Eesti Teaduste Akadeemia, Tallinn, 1993.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Yelyzaveta Tokareva,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Üldrelatiivsusteooria lähedased kosmoloogilised mudelid biskalaar-tensorgravitatsiooniteooriates,

mille juhendajad on Piret Kuusk, DSc ja Simon Vigonski, MSc,

- (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
 3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 26. mai 2017. a.